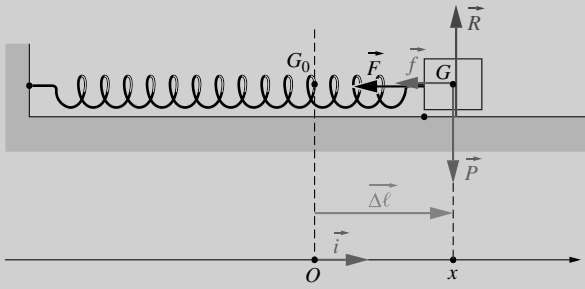


S'autoévaluer

1. 1.



2. $F_x = -k \cdot x$.

3. Si \vec{i} est orienté dans le sens du déplacement initial, $x > 0$ lorsque le ressort est étiré, $x < 0$ lorsqu'il est comprimé.

a. $x = +4,0 \times 10^{-2}$ m et $F_x = -1,9$ N.

b. $x = -3,0 \times 10^{-2}$ m et $F_x = +1,4$ N.

2. 1. Le solide est soumis à trois forces :

- son poids;
- la réaction du support;
- la force exercée par le ressort.

2. Deuxième loi de NEWTON : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Projection sur l'axe horizontal :

$$-k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x}$$

$$D'où : \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

3. $\dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right) + \frac{k}{m} \cdot x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{k}{m}\right) \cdot x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$$

Cette expression est nulle quel que soit t si :

$$\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{k}{m}\right) = 0, \text{ donc si } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

x_m : amplitude du mouvement;

ϕ_0 : phase à l'origine.

Ces deux constantes dépendent des conditions initiales.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} : \text{période propre de l'oscillateur.}$$

3. 1. Un capteur optoélectronique (DEL et phototransistor) permet d'effectuer l'enregistrement souhaité.

2. On peut munir le solide d'une palette pour accroître les frottements de l'air ou même fixer sur le solide une palette immergée pour accroître les frottements dus au liquide.

3. Avec très peu de frottements, les oscillations sont quasiment sinusoïdales ; avec plus de frottements, elles sont pseudo-périodiques : l'amplitude décroît au cours du temps ; avec des frottements importants, on obtient un mouvement apériodique.

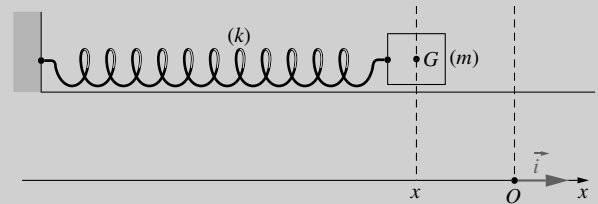
4. 2. Le résonateur oscille à la période imposée par l'excitateur.

4. La résonance est d'autant plus aiguë que les frottements sont faibles.

Exercices

1. 1. a. Un oscillateur élastique est constitué par un solide relié à un ressort dont une extrémité est fixe.

b.



2. L'élongation est l'abscisse de la position du centre d'inertie du solide.

L'amplitude est la valeur maximum de l'élongation.

2. 1. Voir le cours.

2. a. $T = 0,15$ s ; $f = \frac{1}{0,15} = 6,7$ Hz.

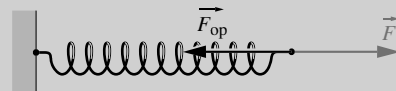
b. $x_m = 2,5$ cm.

3. 1. Courbes 1 et 3 : régime pseudo-périodique ; courbe 2 : régime apériodique.

2. Par ordre croissant des frottements : 1 ; 3 ; 2.

3. Sur tous les enregistrements, on constate que l'amplitude diminue. Les oscillations ne sont donc pas périodiques.

4. 1. a. et b.



2.



3. $k = \frac{F}{\Delta\ell} = \frac{0,32}{5,0 \times 10^{-2}} = 6,4$ N · m⁻¹.

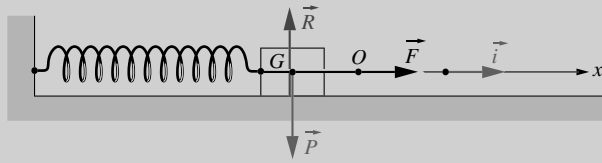
4. Seule la variation de longueur est importante si $\Delta\ell$ a la même valeur, alors la force de rappel a la même valeur, donc $F = 0,32$ N.

5. 1.

a. $F = k \cdot \Delta \ell$
 $= 25,2 \times (17,2 \times 10^{-2} - 15,0 \times 10^{-2})$
 $= 0,554 \text{ N.}$

b. $F = k \cdot \Delta \ell = 25,2 \times (12,8 \times 10^{-2} - 15,0 \times 10^{-2})$
 $= 0,554 \text{ N.}$

3. $F_{\text{op}} = F.$

6. 1.

2. La masse est soumise à trois forces : le poids, la réaction du rail opposée au poids, la force de rappel du ressort.

3. On applique la seconde loi de NEWTON à la masse dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Le poids et la réaction du rail se compensent, car il n'y a pas de frottements.

Sur l'horizontale, on a : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0.$

7. 1. k est la constante de raideur du ressort, m est la masse de l'oscillateur.

2. On dérive deux fois par rapport au temps l'expression de x : $\ddot{x} = -x_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right).$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on constate qu'il faut que $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ pour que l'expression proposée soit solution de l'équation différentielle pour toute valeur de t .

Comme à $t = 0$, on a $x = x_m$, alors $\phi_0 = 0$.

8. 1. a. k s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ et m en kg .

b. Dans le système international, $\frac{d^2x}{dt^2}$ s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\frac{k}{m} \cdot x$ s'exprime en $\frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}{\text{kg}} \cdot \text{m} = \frac{\text{N}}{\text{kg}}$;

or, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc $\frac{k}{m} \cdot x$ s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. La relation est homogène.

2. Dans le système international, 2π n'a pas d'unité et $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ s'exprime en :

$$\sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}}} = \text{s}.$$

9. 1. $T = 0,50 \text{ s}.$

2. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,080}{12,6}} = 0,50 \text{ s}.$

3. $T = T_0$: la pseudo-période est égale à la période propre des oscillations libres, car l'oscillateur est peu amorti.

10. 1. L'amplitude est constante, donc l'amortissement est nul (ou négligeable).

2. a. $x_m = 1,5 \text{ cm}.$

b. L'amortissement est nul, donc $T_0 = T = 0,45 \text{ s}.$

c. À la date $t = 0$, on a $x = -x_m$, donc $\phi_0 = \pi \text{ rad}.$

3. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}};$

donc : $m = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot k = \frac{0,45^2}{4\pi^2} \times 18 = 92 \times 10^{-3} \text{ kg}.$

11. 1. a. Oscillations forcées.

b. Excitateur : tourbillons du vent ; résonateur : pont.

2. a. L'amplitude des oscillations est maximale si $f = f_0$ avec f_0 la fréquence propre du résonateur.

b. Ce phénomène est la résonance.

12. 1. a. Le mobile est soumis à son poids, à la réaction du support, horizontale, à la force \vec{F}_1 exercée par le ressort 1 et à la force \vec{F}_2 exercée par le ressort 2.

b. En l'absence de frottement, la réaction du support compense le poids.

2. À l'équilibre : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$

$$-k_1 \cdot \Delta \vec{\ell}_{1,\text{éq}} + (-k_2 \cdot \Delta \vec{\ell}_{2,\text{éq}}) = \vec{0}.$$

3. a. $-k_1 \cdot \Delta \vec{\ell}_1 - k_2 \cdot \Delta \vec{\ell}_2 = m \cdot \vec{a}_G.$

b. $\Delta \vec{\ell}_1 = \Delta \vec{\ell}_{1,\text{éq}} + \vec{OG} = \Delta \vec{\ell}_{1,\text{éq}} + x \cdot \vec{i}$

et $\Delta \vec{\ell}_2 = \Delta \vec{\ell}_{2,\text{éq}} + \vec{OG} = \Delta \vec{\ell}_{2,\text{éq}} + x \cdot \vec{i}$

avec $\vec{OG} = x \cdot \vec{i}.$

c. $-k_1 \cdot (\Delta \vec{\ell}_{1,\text{éq}} + \vec{OG}) - k_2 \cdot (\Delta \vec{\ell}_{2,\text{éq}} + \vec{OG}) = m \cdot \vec{a}_G;$

d'où : $-(k_1 + k_2) \cdot \vec{OG} = m \cdot \vec{a}_G.$

Avec $\vec{OG} = x \cdot \vec{i}$ et $\vec{a}_G = \ddot{x} \cdot \vec{i}$, on a :

$$m \cdot \ddot{x} + (k_1 + k_2) \cdot x = m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

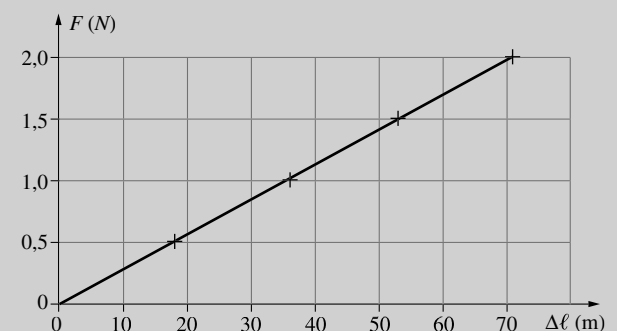
avec $k = k_1 + k_2.$

13. 1. a. $\Delta \ell = \ell - \ell_0.$

F (N)	0,50	1,0	1,5	2,0
$\Delta \ell$ (m)	0,018	0,036	0,053	0,071

b. Lorsque $F = 0 \text{ N}$, alors $\Delta \ell = 0 \text{ m}.$

2.



3. La constante de raideur du ressort est égale au coefficient directeur de la droite obtenue :

$$k = 28 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

14. 1. a. $k = \frac{F}{\Delta \ell} = m_m \cdot \frac{g}{\Delta \ell} = \frac{3,1 \times 10^3 \times 10}{1,0 \times 10^{-3}} = 3,1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

b. $m = 15 + 3,1 = 18,1 \text{ t}$.

c. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{18,1 \times 10^3}{3,1 \times 10^6}} = 0,48 \text{ s}$,

soit : $f_0 = \frac{1}{T_0} = 2,1 \text{ Hz}$.

2. Si les fréquences sont proches, l'ensemble risque d'entrer en résonance.

15. 1. C'est le phénomène de résonance.

2. La période du phénomène est égale à la période de rotation de roue :

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{V} = \frac{2\pi \times 0,30}{126/3,6} = 0,054 \text{ s}, \text{ soit } f = 19 \text{ Hz}.$$

16. 1. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_A \cdot m_B}{k \cdot (m_A + m_B)}}$ et $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

2. a. $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{3,343 \times 10^{-6}} = 8,97 \times 10^{13} \text{ Hz}$.

b. $\lambda = 3,343 \mu\text{m} = \lambda = 3\,343 \text{ nm}$, cette onde se situe dans l'infrarouge.

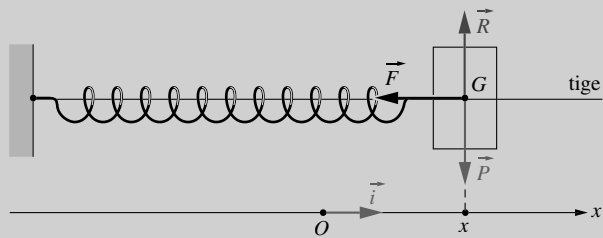
3. a. Pour une mole : $\mu = \frac{1,0 \times 35,0}{1,0 + 35,0} = 0,972 \text{ g}$;

soit pour une molécule :

$$\mu = \frac{1,0 \times 35,0}{6,02 \times 10^{23}} = 1,61 \times 10^{-24} \text{ g} = 1,61 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

b. $k = 4\pi^2 \cdot f_0^2 \cdot \mu$
 $= 4\pi^2 \cdot (8,97 \times 10^{13})^2 \times 1,61 \times 10^{-27}$
 $= 513 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

17. 1. a.



b. On applique la seconde loi de NEWTON à la masse dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Le poids et la réaction du rail se compensent, car il n'y a pas de frottements.

La force de rappel du ressort est : $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$.

Sur l'axe (Ox) , on a donc : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$.

c. On dérive deux fois l'expression proposée :

$$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right);$$

$$\dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right);$$

$$\ddot{x} = -x_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right).$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on constate qu'il faut avoir $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ pour que

l'expression proposée soit solution de l'équation différentielle pour toute valeur de t .

d. $x_m = 2,0 \text{ cm}$; $T_0 = 1,2 \text{ s}$ et à $t = 0$, on a $x = x_m$, alors $\phi_0 = 0$.

e. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$; $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0,292}{8,0}} = 1,2 \text{ s}$.

Cela correspond à la valeur expérimentale de T_0 .

2. a. $\ddot{x} = -x_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x$.

La dérivée seconde de x par rapport au temps est donc proportionnelle à x . Le coefficient de proportionnalité est négatif. Cela correspond à l'allure de la représentation graphique.

b. Le coefficient de proportionnalité est : $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$.

c. Le coefficient directeur est : $\frac{(0,41 - (-0,41))}{(-15 \times 10^{-3} - 15 \times 10^{-3})} = -27,3 \text{ s}^{-2}$.

Il vient donc : $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{27,3}} = 1,2 \text{ s}$. Cette valeur est en

accord avec les valeurs précédentes.

18. 1. a. Les frottements sont négligeables, car l'amplitude est constante.

b. $x_m = 3 \text{ cm}$; $T_0 = 0,40 \text{ s}$;

à $t = 0$, on a $x = 0$, donc : $\phi_0 = +$ ou $-\frac{\pi}{2}$ rad.

Pour trancher entre les deux valeurs, il faut regarder l'évolution de x : immédiatement après la date $t = 0$,

x augmente, donc : $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ rad.

c. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$; $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0,486}{120}} = 0,400 \text{ s}$.

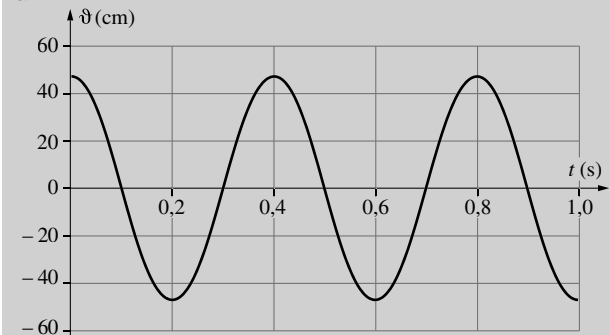
Cela correspond à la valeur expérimentale.

2. a. $\vartheta = \dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$
 $= -3,0 \times \frac{2\pi}{0,40} \times \sin\left(\frac{2\pi}{0,40} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$.

b.

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$3 \cdot \frac{T_0}{4}$	T_0
$\vartheta \text{ (cm} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	47,1	0	-47,1	0	47,1

c.

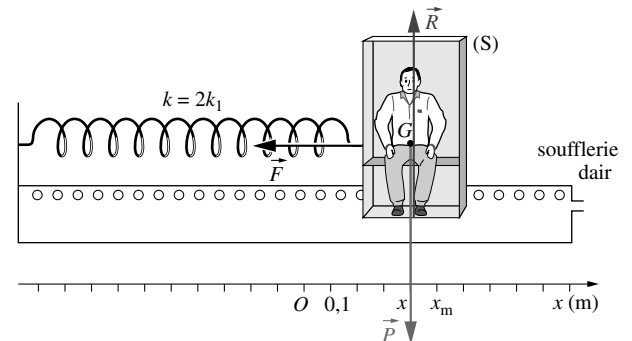


3. a. $a = \ddot{x} = -x_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$
 $= -3,0 \times \left(\frac{2\pi}{0,40}\right)^2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{0,40} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Comment mesurer la masse d'un astronaute ?

1. Équation horaire des oscillations

1.1. Voir le schéma ci-dessous.



1.2. a. En l'absence de frottement : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$;
 $\vec{F} = -k \cdot \Delta\ell = -k \cdot \vec{OG}$.

Deuxième loi de NEWTON, avec m la masse totale du système cabine-astronaute :

$$\begin{aligned} -k \cdot \vec{OG} &= m \cdot \vec{a}_G ; \\ -k \cdot x &= m \cdot \ddot{x} ; \\ \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

1.2. b. On dérive deux fois l'expression proposée :

$$\begin{aligned} x &= x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right) ; \\ \dot{x} &= -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right) ; \\ \ddot{x} &= -x_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on constate qu'il faut avoir $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ pour que l'expression proposée soit solution de l'équation différentielle pour toute valeur de t .

1.2. c. À $t = 0$, d'après le graphique, $x = x_m = 0,6$ cm. D'après l'équation, à $t = 0$, $x = x_m \cdot \cos \phi_0$; d'où $\cos \phi_0 = 1$ et $\phi_0 = 0$.

2. Détermination de la masse de l'astronaute

2.1. L'amplitude ($x_m = 0,6$ m) est constante. Les oscillations ne sont pas amorties. Les frottements sont négligeables.

2.2. Lorsque les frottements sont négligeables, la pseudo-période T est égale à la période propre T_0 .

2.3. $T = T_0 = 1,0$ s.

2.4. $T = T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$; $m = \frac{k \cdot T^2}{4\pi^2}$;

$$m = \frac{4,000 \times 10^3 \times 1,0}{4\pi^2} = 1,0 \times 10^2 \text{ kg} ;$$

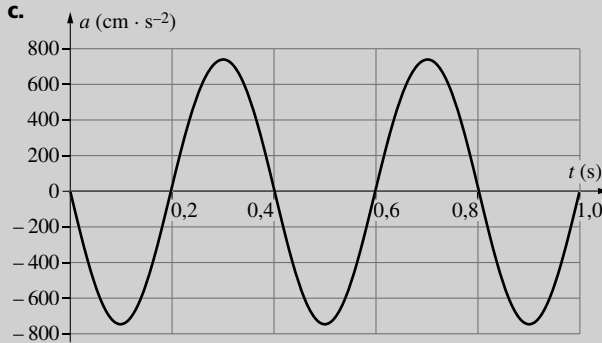
masse de l'astronaute : $M = 100 - 20 = 80$ kg.

2.5. En impesanteur, tout se passe comme si le système n'avait pas de poids \vec{P} et, par conséquent, pas de réaction \vec{R} du support : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$. L'étude du dispositif est la même.

b.

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$3 \cdot \frac{T_0}{4}$	T_0
a (cm · s ⁻²)	0	-740	0	740	0

c.



19. A. Oscillations libres de la suspension

1. a. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

b. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{400}{1,5 \times 10^5}} = 0,32$ s.

2. a. Courbe 1 : régime pseudo-périodique ; courbe 3 : régime apériodique.

b. $T = 0,35$ s $\approx T_0$.

3. a. Pour absorber rapidement les oscillations, il faut l'amortissement correspondant à la courbe 2 : $\lambda = 15\,500$ kg · s⁻¹.

b. La force exercée par l'amortisseur est $F = \lambda \cdot \dot{\vartheta}$. Elle s'exprime en newton et 1 N = 1 kg · m · s⁻². La vitesse s'exprime en m · s⁻¹, donc λ s'exprime en kg · s⁻¹.

B. Oscillations forcées de la suspension

4. a. La courbe 1 correspond à un phénomène de résonance.

b. Ce phénomène n'est pas observé sur les autres courbes, car l'amortissement est trop important.

5. $f_R \approx 2,9$ Hz, soit : $T_R = \frac{1}{f_R} = \frac{1}{2,9} = 0,34$ s.

On trouve une valeur proche de T et T_0 .

20. 1. Il peut se produire un phénomène de résonance.

2. a. $k = \frac{F}{\Delta\ell} = \frac{P}{\Delta\ell} = 6,5 \times 10^3 \times \frac{10}{0,0012} = 5,4 \times 10^7$ N · m⁻¹.

b. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$; $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{16 \times 10^3}{5,4 \times 10^7}} = 0,11$ s

et $f_0 = \frac{1}{T_0} = 9,3$ Hz.

c. Le phénomène sera perceptible si, en une période d'oscillation T_0 , le camion parcourt la distance d .

Alors : $\vartheta = \frac{d}{T_0} = \frac{1,2}{0,11} = 11$ m · s⁻¹, soit 40 km · h⁻¹.

3. Si la vitesse est très différente, la fréquence d'excitation sera différente de la fréquence propre du camion, il n'y aura pas de résonance.

Oscillations libres et forcées

Données :

$$k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}; m = 100 \text{ g}; \ell_0 = 10,0 \text{ cm};$$

$$\ell = 12,4 \text{ cm}; g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}; \pi = 3,14;$$

$$\frac{1}{2,4} = 0,42; \frac{1}{3,2} = \frac{\pi}{10}.$$

1. Étude statique

$$1.1. m \cdot g = k' \cdot (\ell - \ell_0); k' = \frac{m \cdot g}{(\ell - \ell_0)}; k' = 42 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$1.2. \text{ Erreur relative} = \frac{|k_{\text{mesurée}} - k_{\text{fournisseur}}|}{k_{\text{fournisseur}}} \times 100 \\ = \frac{42 - 40}{40} \times 100 = \frac{2}{40} \times 100 = 5 \%$$

2. Étude dynamique

$$2.1. 2T = 0,63 \text{ s}; T = 0,315 \text{ s}.$$

$$2.2. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,100}{40}}; T = 0,31 \text{ s}.$$

Cette valeur est en accord avec la valeur théorique.

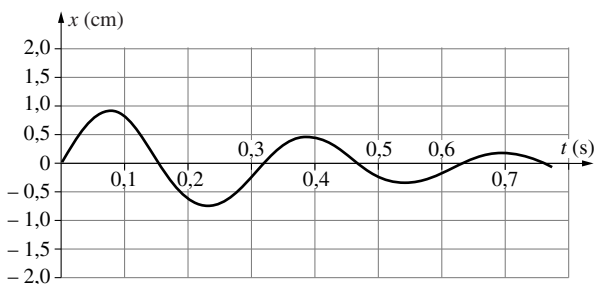
$$2.3. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Avec $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,

k s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$;

d'où T en $\sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}}$; T s'exprime donc en s.

2.4. Solution plus visqueuse, donc les frottements sont plus importants. Les oscillations seront amorties.



3. Étude des oscillations forcées

3.1. Le moteur muni de l'excentrique est appelé « excitateur ».

3.2. Le système {ressort+masse} est le « résonateur ».

3.3. Pour $f = 3,2 \text{ Hz}$, l'amplitude x_{max} est maximale. Il se produit un phénomène de résonance.

$$3.4. \text{ À la résonance : } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3,2} = \frac{\pi}{10} \text{ s} = 0,31 \text{ s}.$$

3.5. À la résonance, la période des oscillations forcées est égale à celle des oscillations libres.

3.6. Avec une solution visqueuse, la résonance est « floue » : l'amplitude pour $f = 3,2 \text{ Hz}$ ne sera que faiblement supérieure aux autres amplitudes.