- Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.

Chapitre 11
Mouvement dans un champ de gravitation

I. Mouvement circulaire et uniforme des astres

Rappels du chapitre 9:

Le vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet : $\vec{a} = a_N \cdot \vec{n} + a_T \cdot \vec{t}$
avec a_N **l'accélération normale** et a_T **l'accélération tangentielle.**

Définition : L'accélération dans la base de de Frenet s'écrit :

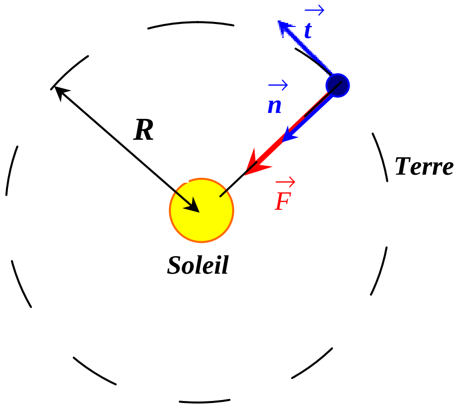
$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = a_N \cdot \vec{n} + a_T \cdot \vec{t}} \quad \textbf{Avec} \quad \boxed{a_N = \frac{v^2}{R}} \quad \textbf{et} \quad \boxed{a_T = \frac{dv}{dt}}$$

Exercice : Définir les conditions nécessaire sur a_N et a_T pour :
a) un mouvement rectiligne et uniforme
b) un mouvement circulaire et uniforme

I.1 Nature du mouvement

Le mouvement d'un objet en orbite autour d'un astre est toujours une ellipse. Dans certains cas cette ellipse est un cercle ou s'en approche fortement, comme par exemple pour l'orbite de la Terre dans le référentiel héliocentrique.

⇩ *Figure 1: Orbite de la Terre*



Considérons le mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil :

Système étudié : Terre de masse M_T

Référentiel d'étude : héliocentrique supposé galiléen

Inventaire des forces extérieures :
$\vec{F}$ exercée par le Soleil sur la Terre.

Comme la masse de la Terre est constante, d'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} = M_T \cdot \vec{a}$$

Or la force de gravité exercée par le Soleil de masse M_S sur la Terre a pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{n}}$$

G = constante de gravitation universelle

F en N
M en kg
R en m
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

D'où : $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{n} = M_T \left(a_N \cdot \vec{n} + a_T \cdot \vec{t}\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2}} \cdot \vec{n} = \boxed{M_T a_N} \cdot \vec{n} + \boxed{M_T a_T} \cdot \vec{t}$$

Donc, **par identification** : $\begin{cases} M_T a_N = G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \\ M_T a_T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_N = G \cdot \frac{M_S}{R^2} \\ a_T = 0 \end{cases}$

Or si $a_T = 0$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$ car **par définition** $a_T = \frac{dv}{dt}$

Et si $\frac{dv}{dt} = 0$ cela implique que $v = \left\|\vec{v}\right\| = cste.$

Ainsi, <u>**si**</u> la <u>**trajectoire**</u> d'un objet en orbite gravitationnelle est <u>**circulaire**</u> alors son <u>**mouvement est uniforme**</u>.

Exemples :

- La Terre ayant une orbite quasi-circulaire, sa vitesse reste toujours voisine de 30 *km/s*
- La comète de Halley ayant une orbite très elliptique, sa vitesse varie énormément (de 1 à 55 *km/s*)

Question :

Rechercher les unités de la constante de gravitation universelle.

I.2 Détermination de la vitesse

D'après la partie précédente on a :

$$a_N = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$$

Or, **par définition** : $a_N = \frac{v^2}{R}$

D'où : $\frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_S}{R^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}}}$

v en m/s
M_S en kg
R en m
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

I.3 Période de révolution

La période de révolution T est le temps nécessaire à l'objet (ici la Terre) pour faire un tour sur son orbite.
La longueur L d'une orbite est égale au périmètre du cercle, soit : $L = 2\pi R$

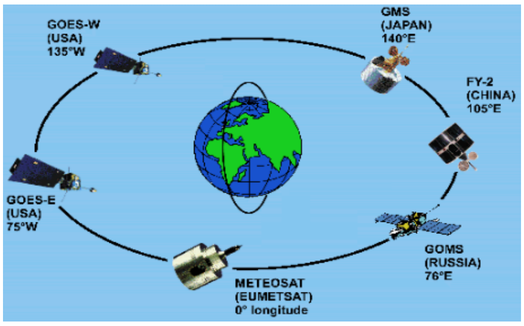
D'où : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{L}{T} = \frac{2\pi R}{T}$

En utilisant l'expression du III.2 :

$$\sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}}$$

Question :

Rechercher l'altitude h à laquelle sont placés les satellites géostationnaires.



⇧ *Figure 2 : orbite géostationnaire*

II. Lois de Kepler

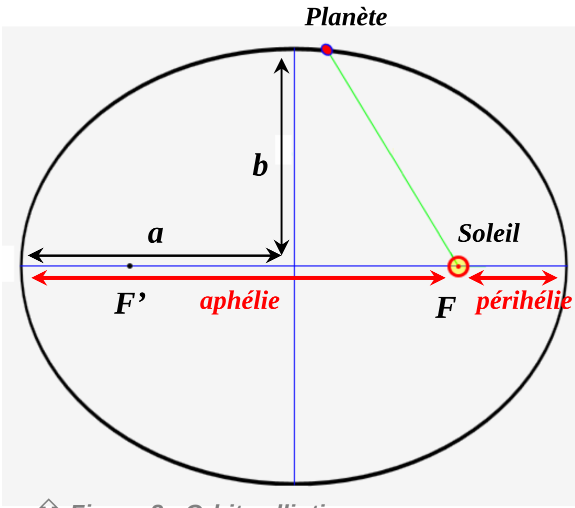
Première loi : loi des orbites (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

A noter :

- Le péricentre est le point de l'orbite le plus proche de l'astre central.
  Si l'astre central est le Soleil on parle de périhélie
  Pour la Terre, c'est le périgée.
- L'apocentre est le point de l'orbite le plus éloigné de l'astre central.
  Si l'astre central est le Soleil on parle d'aphélie
  Pour la Terre, c'est l'apogée.

a est le demi-grand axe et b est le demi-petit axe.



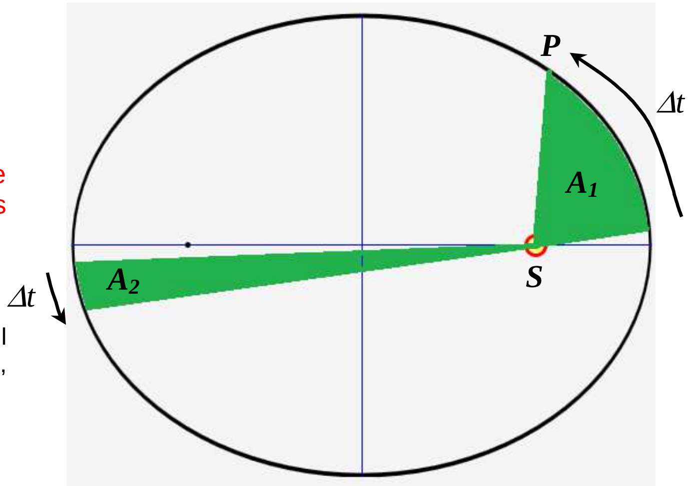
⇧ *Figure 3 : Orbite elliptique*

Deuxième loi : loi des aires (1609)

Le segment [SP] (ou rayon vecteur) qui relie le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

A noter :

Cette loi implique que plus la planète s'approche du Soleil plus sa vitesse augmente. De même, plus elle s'en éloigne, plus sa vitesse diminue.



⇧ *Figure 4 : Loi des aires : $A_1 = A_2$*

Troisième loi : loi des périodes (1618)

Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de son orbite.

$$\boxed{T^2 = k \times a^3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

D'après la partie I.3 on a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$$

$$\Leftrightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM_S}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$$

⇧ *Figure 5: Johannes Kepler (1571-1630)*

Ainsi, quelque soit la planète *P* de période de révolution *T* en orbite autour du Soleil à une distance *R*, le rapport du carré de sa période sur le cube du rayon de son orbite ne dépend que de la masse du Soleil.

Ainsi : $\frac{{T_{Terre}}^2}{{R_{Terre}}^3} = \frac{{T_{Mars}}^2}{{R_{Mars}}^3} = \frac{{T_{Halley}}^2}{{a_{Halley}}^3} = ... = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

A noter :

Les lois de Kepler, bien qu'écrites pour les planètes de notre système solaire, s'appliquent pour tout corps en orbite elliptique autour d'un astre.

Ainsi : $\frac{{T_{Lune}}^2}{{R_{Lune}}^3} = \frac{{T_{Satellite}}^2}{{R_{Satellite}}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Terre}}$

⇦ ***Figure 6***

Position de 18 000 satellites en orbite autour de la Terre.

On voit nettement apparaître l'orbite géostationnaire.