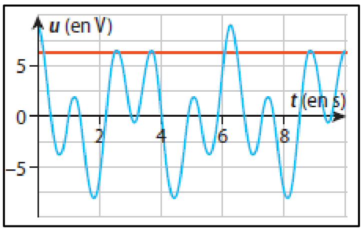
- Relier l'intensité d'un courant électrique au débit de charges.
- Identifier des situations variées où il y a accumulation de charges de signes opposés sur des surfaces en regard.
- Citer des ordres de grandeur de valeurs de capacités usuelles.
- Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge.
- Expliquer le principe de fonctionnement de quelques capteurs capacitifs.

Chapitre 18

Dynamique d'un dipôle RC

En électricité, le régime est variable quand les tensions et intensités de courants dépendent du temps (courbe bleue). Lorsque ces grandeurs gardent des valeurs constantes, on parle de régime permanent ou continu (courbe rouge).



Doc 1

En régime permanent, L'intensité du courant I est constante et correspond à la quantité de charges Q ayant traversé la section d'un conducteur pendant une durée Δt

$$\boxed{I = \frac{Q}{\Delta t}}$$

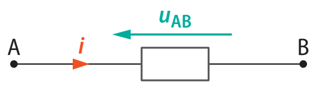
Avec I en ampères (A)
Q en coulombs (C) et Δt en s.

I. Régime variable en électricité

I.1 Tension aux bornes d'un dipôle, intensité du courant

- La tension u_{AB} entre les bornes A et B d'un dipôle est une grandeur algébrique, exprimée en volts (V).
- L'intensité i du courant électrique, exprimée en ampères (A) est une grandeur algébrique associée à un débit de charges électriques.

Lorsque i > 0, la flèche a le sens dans lequel des charges positives se déplaceraient dans le circuit (donc le sens inverse de circulation des électrons).



Doc.1 Par convention, les flèches d'intensité et de tension sont dans des sens opposés.

I.3 Intensitédu courant électrique en régime variable

L'intensité d'un courant électrique est la **dérivée par rapport au temps** de la charge électrique q circulant :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

i (t) en ampères (A)
q (t) en coulombs (C)
t en secondes (s)

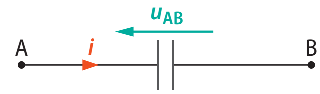
L'intensité d'un courant électrique est le **débit instantané** de la charge électrique.

II. Condensateur

II.1 Définition :

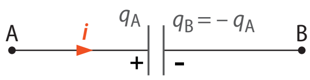
Un ensemble de deux armatures conductrices face à face séparées par un isolant est appelé un condensateur.

S'il existe une tension électrique entre ses armatures, des charges électriques s'y accumulent. On dit que ce dipôle a un comportement capacitif.



Doc. 2 Symbole électrique d'un condensateur qui rappelle sa constitution.

II.2 Charges aux armatures :

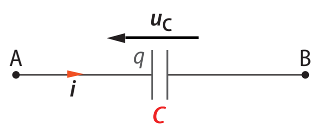


Les deux armatures d'un condensateur portent des charges électriques opposées.

Le condensateur est électriquement neutre à tout instant.

• Le condensateur se charge • Le courant arrive sur l'armature chargée + • q_A augmente au cours du temps • $i(t) = \frac{dq_A}{dt}(t) > 0$ circule dans le sens du schéma (Les électrons quittent bien l'armature A).	•Le condensateur se décharge •Le courant quitte l'armature chargée + • q_A diminue au cours du temps • $i(t) = \frac{dq_A}{dt}(t) < 0$ circule dans le sens inverse (Les électrons arrivent bien l'armature A).

II.3 Capacité du condensateur



Soit un condensateur entre les bornes duquel est établie une tension u_C.
La capacité (C) du condensateur vérifie :

$$\boxed{q(t) = C \times U_c(t)}$$

q en coulombs (C)
C en farads (F)
u_C en volts (V)

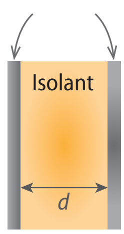
Exemple: Un condensateur de capacité C = 5,0 µF a entre ses bornes une tension u = 12 V.
Il accumule à son armature positive une charge électrique : $q = Cu = 5{,}0 \times 10^{-6} \times 12 = 6{,}0 \times 10^{-5}$ C

La tension u_C aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps.

L'intensité du courant électrique $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$ (La capacité C est en effet constante).

$$\boxed{i(t) = C \times \frac{dU_c(t)}{dt}}$$

La capacité C d'un condensateur plan dépend de la superficie S des armatures, de la distance d qui les sépare et de la nature de l'isolant.
Elle s'écrit : $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$



Condensateur plan.

Vide	1
Quartz	3,8
Papier	4
Porcelaine	6,5
Eau pure	80

Permittivité relative ε_r de quelques milieux.

où S est la superficie des armatures en m² et d leur écartement en m. ε_0 est la permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}

ε_r est la permittivité relative de l'isolant, sans unité

III. Le dipôle RC en charge

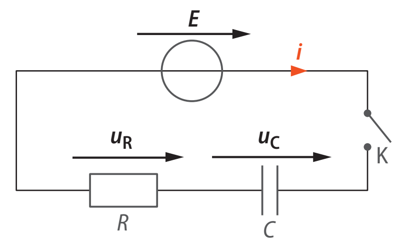


Schéma du circuit électrique de la charge du condensateur.

Un condensateur de capacité C est monté en série avec un dipôle ohmique de résistance R et une source idéale de tension de f.é.m E.
L'interrupteur K est initialement ouvert et le condensateur est déchargé

À l'instant t = 0 s, on ferme l'interrupteur.

On cherche l'évolution de la tension u_C (t) aux bornes du condensateur.

III.1 Équation différentielle régissant $u_C(t)$:

Par application de la loi des mailles au circuit : $U_R(t) + U_C(t) = E$

Par application de la loi d'Ohm au conducteur ohmique : $U_R(t) = R \times i(t)$
Il vient alors : $R \times i(t) + U_C(t) = E$ Or, $i(t) = C \times \frac{dU_c(t)}{dt}$

On obtient l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge :

$$R \times C \times \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = E$$

Ou encore :

$$\boxed{\frac{dU_c(t)}{dt} = -\frac{U_c(t)}{R \times C} + \frac{E}{R \times C}}$$

III.2 Solution de l'équation différentielle

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, G une fonction du temps vérifiant l'équation différentielle $\frac{dG(t)}{dt} = aG(t) + b$

La solution générale de l'équation est de la forme : $G(t) = C_i e^{at} - \frac{b}{a}$

La donnée à l'origine du temps $G(0) = G_0$ permet de calculer la valeur de la constante d'intégration C_i.

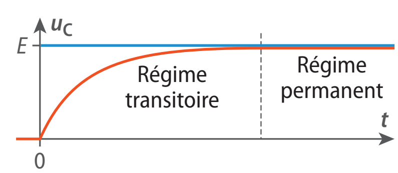
Par identification : $a = -\frac{1}{R \times C}$ et $b = \frac{E}{R \times C}$

La solution générale est de la forme : $U_C(t) = C_i \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$

On détermine C_i grâce à la condition initiale : à t = 0s, le condensateur est déchargé, on a donc $U_C(0) = 0\ V$: $U_C(0) = C_i \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times 0} + E = C_i + E = 0$

Par conséquent, $C_i = -E$ Au final, $U_C(t) = -E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$ et donc, en factorisant par E,

on trouve l'expression de $U_C(t)$: $\boxed{U_C(t) = E \times (1 - e^{-\frac{t}{R \times C}})}$

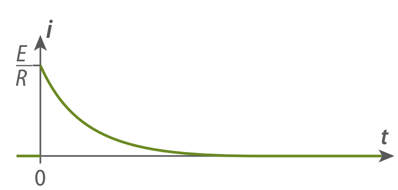


Tension aux bornes du condensateur lors de la charge.

La courbe de l'évolution de la tension U_C en fonction du temps est illustrée ci-contre. On constate l'existence d'un régime transitoire, où la tension varie, suivi d'un régime permanent, où elle peut être considérée comme constante.

L'intensité du courant dans le circuit s'écrit, quant à elle:

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt}(t) = -CE\frac{d(e^{-t/RxC})}{dt} = \frac{E}{R}e^{-t/RxC}$$



Intensité du courant dans le condensateur lors de la charge.

IV. Le dipôle RC en décharge

Un condensateur de capacité C est monté en série avec un conducteur ohmique de résistance R et un interrupteur K ouvert. Le condensateur a une tension initiale U_0 à ses bornes (il a été préalablement chargé). A l'instant t = 0 s, on ferme l'interrupteur. On cherche l'évolution de la tension $U_C(t)$ de la tension aux bornes du condensateur.

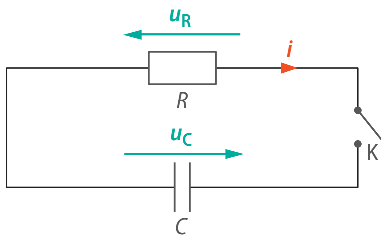


Schéma du circuit électrique de la décharge du condensateur.

IV.1 <u>Équation différentielle régissant $u_c(t)$</u> :

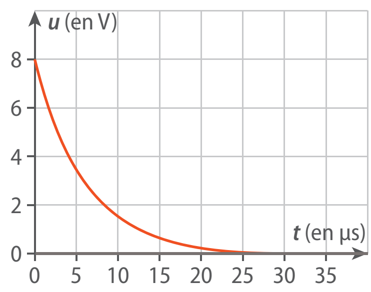
Par application de la loi des mailles au circuit : $U_R(t) + U_C(t) = 0$

Par application de la loi d'Ohm au conducteur ohmique : $U_R(t) = R \times I(t)$

Il vient alors : $R \times I(t) + U_C(t) = 0$ Or, $I(t) = C \times \frac{dU_C(t)}{dt}$

On obtient l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge : $$R \times C \times \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = 0$$

Ou encore : $$\boxed{\frac{dU_c(t)}{dt} = -\frac{U_c(t)}{R \times C}}$$



Évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur pendant la décharge.

IV.2 <u>Solution de l'équation différentielle</u>

Par identification : $a = -\frac{1}{R \times C}$ et $b = 0$

La solution générale est de la forme : $U_C(t) = C_i \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$

On détermine C_i grâce à la condition initiale : à t = 0 s, le condensateur est chargé, on a donc $Uc(0) = \mathrm{E}$:

$U_C(0) = \mathrm{E} \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times 0} = \mathrm{E}$ Par conséquent, $C_i = \mathrm{E}$ Au final : $$\boxed{U_C(t) = \mathrm{E} \times e^{-\frac{t}{R \times C}}}$$

<u>Question</u> : - Comment s'écrira alors l'intensité du courant dans le circuit ?
- Représenter l'evolution temporelle de l'intensité.

V. Temps caractéristique (de charge ou décharge)

Les équations précédentes montrent que $U_C(t)$ dépend du produit R x C, que ce soit lors de la charge ou lors de la décharge.

On pose : $$\boxed{\tau = R \times C}$$

τ en secondes (s)
R en ohms (Ω)
C en farads (F)

$\boldsymbol{\tau}$ est appelé temps caractéristique (ou constante de temps) du circuit RC série. Il est homogène à une durée et s'exprime en s.

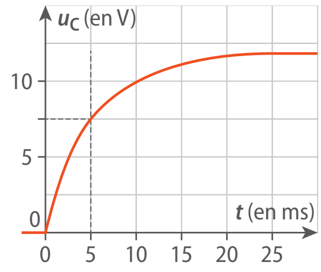
- Plus τ est grand, plus la durée de charge Δt_{charge} ou de décharge $\Delta t_{décharge}$ est grande.
- On considère qu'un condensateur est complètement chargé (ou complètement déchargé) après une durée égale à $5\boldsymbol{\tau}$.
- **Pour la charge, $U_C(\tau) \approx 0,63 \times E$ *et* pour la décharge, $U_C(\tau) \approx 0,37 \times E$**

Exercice 1

On veut vérifier la valeur de la capacité C d'un condensateur électrochimique utilisé sur une carte-mère d'ordinateur

Ce condensateur est associé en série avec un dipôle ohmique de résistance $R = 10\,\Omega$ et un générateur de f.é.m $E = 12V$. On réalise la charge du condensateur en traçant la tension à ses bornes. Déterminer la capacite C du condensateur.

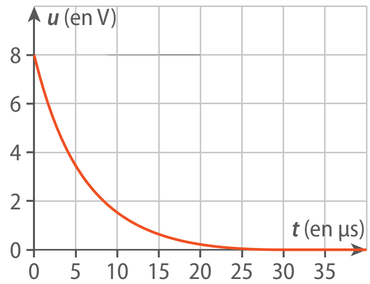
condensateurs électrochimiques



Courbe de U_c n fonction de t.

Exemple 2

Un condensateur de capacité C se décharge dans un dipôle ohmique de résistance $R = 200\,\Omega$. Déterminer la capacite C du condensateur.



Évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur pendant la décharge.

VI. Energie électrique Ee emmagasinée par un condensateur

L'énergie électrique Ee emmagasinée par un condensateur de capacité C possédant une tension u à ses bornes et une charge q sur une des armatures est :

$$\boxed{E_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \times u_c^2}{2}}$$

Ee en joules (J)
u_c en volts (v)
q en coulombs (C)
C en farads (F)

L'énergie du condensateur ne peut varier brusquement. Par conséquent la tension aux bornes d'un condensateur est continue au cours du temps. Il en va de même pour la charge q car $q = C.u$

Par contre l'intensité du courant $i = dq/dt$ présente une discontinuité à la charge ou à la décharge.