- Définir le vecteur vitesse et le vecteur accélération
- Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse.
- Exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire
- Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme.

Chapitre 9

Description d'un mouvement

Le mouvement d'un objet se décrit grâce à la connaissance de sa trajectoire, de sa vitesse et de son accélération. Sachant qu'un objet peut avoir des mouvements différents suivant le référentiel par rapport auquel on l'étudie, l'étude d'un mouvement doit toujours commencer par le choix d'un référentiel.

Le choix du référentiel se fait de manière à ce que l'étude du mouvement puisse se faire sans trop de difficulté et que l'on puisse y appliquer les lois de la mécanique. Cette année nous utiliserons toujours des des référentiels galiléens.

Exemples de référentiels galiléens :

- Le référentiel terrestre (il est constitué d'un point de la Terre et de trois axes (en général un axe vertical et deux axes dans le plan horizontal).On l'utilise pour décrire les mouvements à petite échelle des objets qui nous entourent.
- Le référentiel géocentrique (Il est placé au centre de la Terre. Ses axes ont des directions constantes dans le temps.)
- Le référentiel héliocentrique (Il est placé placé au centre du Soleil avec des axes de directions constantes.

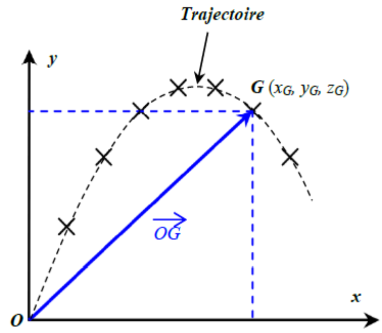
Rem. Le référentiel placé au centre d'un astre a toujours un nom qui se finit par le suffixe –centrique comme par exemple celui de la Lune (sélénocentrique) ou de la planète Mars (aréocentrique).

I. Décrire un mouvement

I.1 Vecteur position

On se limitera cette année à l'étude de mouvements dans un plan (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) par exemple.

L'ensemble des points occupés successivement par le centre de masse (centre de gravite) du mobile *M* au cours du temps est appelé trajectoire.



Lorsqu'un solide se déplace sur sa trajectoire, la position de son centre d'inertie change au cours du temps : A chaque position *OG* est donc associée une date *t* : on la notera : *OG* (*t*)

$$\overrightarrow{OM} = x_G\ \vec{i} + y_G\ \vec{j}$$

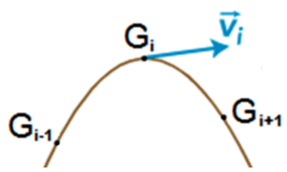
$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Avec *x*(*t*), *y*(*t*) et *z*(*t*) des fonctions qui dépendent du temps *t*.

I.2 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse caractérise les variations du vecteur position (en valeur et en direction) au cours du temps.

Il peut être déterminé graphiquement à un instant t_i par assimilation avec la vitesse moyenne entre les dates t_{i-1} et t_{i+1} :

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$



Le vecteur vitesse est parallèle à $G_{i-1}G_{i+1}$

Le **vecteur vitesse instantanée** d'un objet en mouvement correspond à la dérivée par rapport au temps de son vecteur position : $\vec{v}_i = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

De par sa définition, le vecteur vitesse instantanée peut également s'exprimer dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sous la forme :

$$\boxed{\vec{v}_i = v_x.\vec{\imath} + v_y.\vec{\jmath} \quad \text{avec} \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{dy}{dt}}$$

Caractéristiques du vecteur vitesse instantanée :

- direction : tangente à la trajectoire au point considéré - sens : celui du mouvement
- valeur : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (s'exprime en $m.s^{-1}$)

Exercice 1 :

La position d'un mobile M au cours du temps est donnée par le vecteur ci-contre :

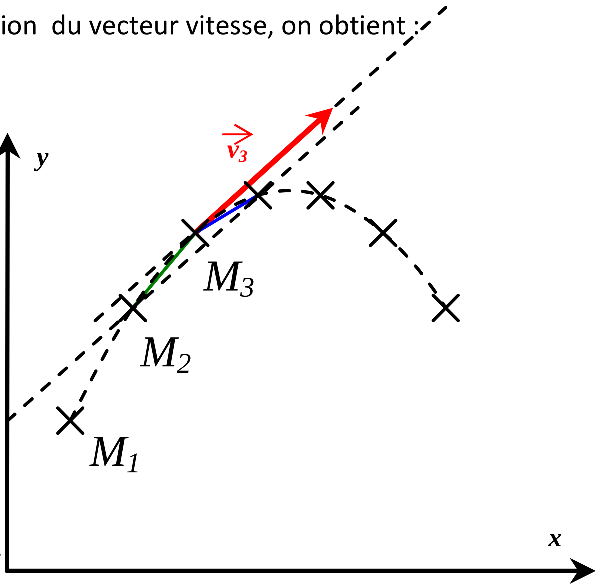
a) Représenter sa trajectoire dans un repère entre 0 et 3 s.
b) Pourquoi peut-on parler d'un mouvement plan ?
c) Déterminer l'expression du vecteur vitesse du mobile en fonction du temps.
d) Déterminer la valeur de la vitesse du mobile à la date t = 2,0 s.

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = -5t^2 + 10t + 2 \end{pmatrix}$$

Graphiquement, le vecteur vitesse en un point est une moyenne de la vitesse entre le point précédent et le point suivant. Ce vecteur est porté par la tangente à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.

En élargissant l'intervalle de temps pour obtenir une meilleure direction du vecteur vitesse, on obtient :

$$\vec{v}_3 = \frac{\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_2}}{t_4 - t_2} = \frac{\overrightarrow{OM_4} + \overrightarrow{M_2O}}{t_4 - t_2} = \frac{\overrightarrow{M_2M_4}}{2\tau}$$



Remarque :
La durée constante entre deux positions successives du mobile sur un relevé est notée ici τ (tau).

Méthode de tracé du vecteur vitesse $\vec{v}_3$:

1) Mesurer les segments M_2M_3 et M_3M_4
2) Calculer la norme du vecteur :

$$\|\vec{v}_3\| = v_3 = \frac{M_2M_3 + M_3M_4}{2\,\tau}$$

3) Tracer ce vecteur sur le relevé en tenant compte de l'échelle.

I.3 Vecteur accélération

Le **vecteur accélération instantanée** d'un objet en mouvement correspond à la dérivée par rapport au temps de son vecteur vitesse : $\vec{a}_i = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

De part sa définition, le vecteur accélération instantanée peut également s'exprimer dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$\boxed{\vec{a}_i = a_x.\vec{\imath} + a_y.\vec{\jmath} \quad \text{avec} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{et} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}}$$

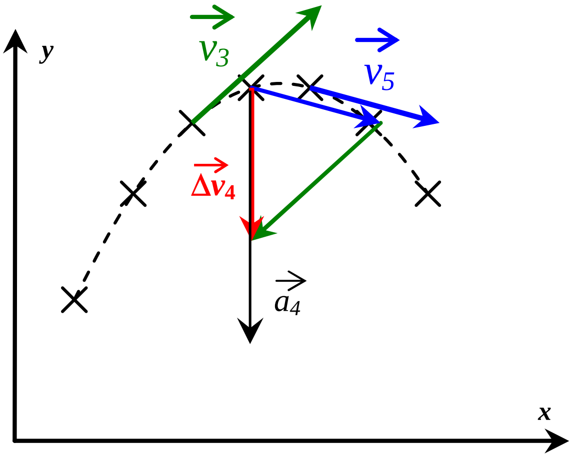
Caractéristiques du vecteur accélération instantanée :

- Direction et sens : même que ceux de $\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}$
- valeur : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ (s'exprime en $m.s^{-2}$)

Graphiquement, sur un relevé de positions, pour tracer le vecteur accélération en un point, il faut au préalable tracer le vecteur « variation de vitesse » noté : v

$$\vec{a} = \frac{\text{variation vitesse}}{\text{variation temps}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{a_4} = \frac{\overrightarrow{\Delta v_4}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_5} - \overrightarrow{v_3}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_5} - \overrightarrow{v_3}}{2\tau}$$



Méthode de tracé du vecteur accélération $\vec{a}_4$:

1) Tracer le vecteur vitesse en M_3 et celui en M_5.
2) Construire en partant de M_4 le vecteur : $\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_5} - \overrightarrow{v_3}$
3) Calculer la norme de l'accélération grâce à la formule :

$$a_4 = \frac{\Delta v_4}{2\,\tau}$$

4) Tracer ce vecteur accélération dans le même sens et la même direction que $\overrightarrow{\Delta v}$ en tenant compte de l'échelle.

Exercice 2 :

La position d'un mobile M au cours du temps est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = -5t^2 + 10t + 2 \\ \end{pmatrix}$$

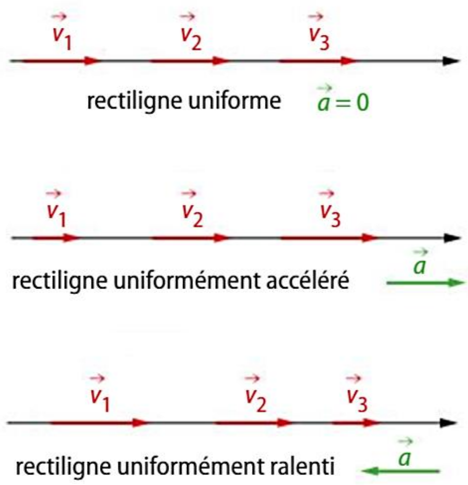
a) Déterminer l'expression du vecteur accélération $a(t)$ en fonction du temps.
b) Calculer la valeur de l'accélération subie par le mobile à la date t = 2,7 s.

II. Mouvement et base de Frenet

II.1 Mouvements rectilignes

Un mouvement est rectiligne si la trajectoire étudiée est représentée par une droite. Dans ce cas, les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ gardent la même direction, celle de la trajectoire. Il y a 3 mouvements possibles :

- Si $\vec{a} = \vec{0}$:
  Le vecteur vitesse est constant et le mouvement est **rectiligne uniforme**.
- Si $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de même sens :
  La norme du vecteur vitesse augmente, son sens et sa direction restent les mêmes ; le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.
- Si $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés :
  La norme du vecteur vitesse diminue, son sens et sa direction restent les mêmes ; le mouvement est **rectiligne uniformément ralenti**.



II.2 Mouvements circulaires

Dans le cas d'une trajectoire ciculaire, les vecteurs vitesse et accélération ne sont plus colinéaires. Dans ce cas, on utilise un repère plus adapté pour les représenter : le **repère de Frenet**.

Dans le cas d'un mouvement circulaire varié :

Le **repère de Frenet** utilise deux vecteurs unitaires partant d'un point M en mouvement :

– le **vecteur tangentiel** $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

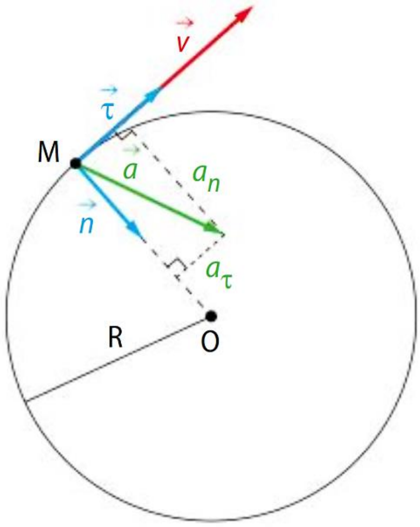
– le **vecteur normal** $\vec{n}$ perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et orienté vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

– le vecteur vitesse $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{\tau}$ et de même sens :

$$\vec{v} = v.\vec{\tau}$$

– le vecteur accélération $\vec{a}$ a une coordonnée tangentielle selon $\vec{\tau}$ et une coordonnée normale selon $\vec{n}$:

$$\boxed{\vec{a} = a_t.\vec{\tau} + a_n.\vec{n}} \quad \text{avec} \quad \boxed{a_t = \frac{dv}{dt} \;;\; a_n = \frac{v^2}{R}}$$



Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme :

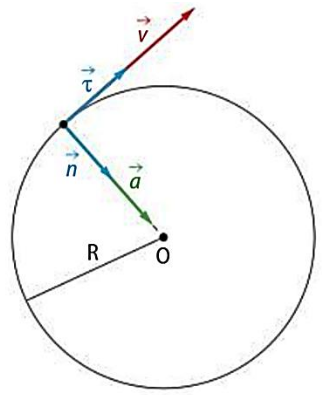
La valeur de la vitesse ne change pas donc $\frac{dv}{dt} = 0$

Ainsi : $a_\tau = 0$ et $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ ($\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{n}$)

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire et uniforme, les vecteurs vitesse et accélération sont orthogonaux et la norme de l'accélération est :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

(R est le rayon de la trajectoire)



Mouvement circulaire et uniforme